KOMPLEKSNA ANALIZA

Pavle Pandžić, 9. predavanje

Prisjetimo se:

Neka je z_0 izolirani singularitet funkcije f, tj. f je holomorfna na $K^*(z_0, R)$ za neki $R > 0$.

Neka je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Laurentov razvoj funkcije f na $K^*(z_0, R)$.

Reziduum funkcije f u z_0 je

$$\text{res}\,(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) dw.$$

Neka je γ PDG zatvoren put u $\mathbb{C}$ i neka $z \in \mathbb{C}$ nije u slici od γ. Tada definiramo **indeks krivulje γ s obzirom na** z kao

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

$\nu(\gamma, z)$ je uvijek cijeli broj. Intuitivno, to je broj obilazaka puta γ oko z u pozitivnom smjeru.

Ako je γ kontura (PDG zatvoren put bez samopresijecanja), onda je indeks γ u odnosu na $z \notin \gamma$ dan sa

$$\nu(\gamma, z) = \begin{cases} 1, & z \text{ unutar } \gamma; \\ 0, & z \text{ izvan } \gamma. \end{cases}$$

Teorem o reziduumima. Neka je Ω otvoren i zvjezdast skup, $z_1, \ldots, z_k \in \Omega$ različite točke, te $f : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ holomorfna.

Tada je

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \nu(\gamma, z_j) \text{res}\,(f, z_j)$$

za svaki PDG zatvoren put $\gamma : [a, b] \to \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$.

Korolar. Uz pretpostavke Teorema o reziduumima, pretpostavimo još i da je γ kontura, te da su $z_1, \ldots, z_m$ singulariteti od f unutar γ.

Tada je

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \text{res}\,(f, z_j).$$

Meromorfne funkcije

Funkcija f je **meromorfna** na Ω ako ili nema singulariteta, ili su joj svi singulariteti izolirani, i to ili uklonjivi singulariteti ili polovi.

(Pretpostavljat ćemo da smo uklonjive singularitete uklonili, te da su ostali samo polovi.)

Na primjer, ako su $F, G \in H(\Omega)$, i ako G ima samo izolirane nultočke, onda je $f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$ meromorfna, i singulariteti od f su upravo nultočke od G.

Teorem (Princip argumenta)

Neka je Ω otvoren zvjezdast skup, neka je f meromorfna funkcija na Ω, i neka je γ kontura u Ω takva da f nema ni nultočaka ni polova na γ. Tada vrijedi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_\gamma(f) - P_\gamma(f),$$

pri čemu je $N_\gamma(f)$ broj nultočaka od f unutar γ računajući kratnost, a $P_\gamma(f)$ je broj polova od f unutar γ računajući kratnost.

(Drugim riječima, $N_\gamma(f)$ je suma kratnosti svih nultočaka od f unutar γ, a $P_\gamma(f)$ je suma kratnosti svih polova od f unutar γ.)

Dokaz. Primijetimo najprije da su nultočke od f unutar γ nužno izolirane, dakle i konačnog reda. U suprotnom bi zbog principa jedinstvenosti vrijedilo $f = 0$ unutar γ, a onda zbog neprekidnosti i $f = 0$ na γ, što je u kontradikciji s pretpostavkom da f nema nultočaka na γ.

Primijenimo Korolar Teorema o reziduumima na funkciju

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Dobivamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)dz = \sum_j \text{res}(F, z_j),$$

gdje su z_j singulariteti od F unutar γ.

Primijetimo da su singulariteti od F upravo nultočke i polovi od f (pa su dakle svi singulariteti od F izolirani). Za dokaz teorema je prema tome dovoljno provjeriti da je

$$\text{res}\,(F, z') = \text{ red nultočke } z' \text{ od } f \tag{1}$$

za svaku nultočku z' od f unutar γ, te da je

$$\text{res}\,(F, z'') = -\text{ red pola } z'' \text{ od } f \tag{2}$$

za svaki pol z'' od f unutar γ.

Ako je z' nultočka od f unutar γ reda $m \geq 1$, onda na nekom krugu $K(z', r)$ vrijedi

$$f(z) = (z - z')^m g(z),$$

gdje je g holomorfna i $g(z) \neq 0$ na $K(z', r)$.

Slijedi da je na $K(z', r)$

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-z')^{m-1}g(z) + (z-z')^m g'(z)}{(z-z')^m g(z)} = \frac{m}{z-z'} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Funkcija $\frac{g'(z)}{g(z)}$ je holomorfna na $K(z', r)$, pa je

$$\operatorname{res}(F, z') = \operatorname{res}\left(\frac{m}{z-z'}, z'\right) = m,$$

dakle vrijedi (1).

Neka je sada z'' pol od f unutar γ reda $m \geq 1$.

Tada na nekom krugu $K(z'', r)$ vrijedi

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z'')^m},$$

gdje je g holomorfna i $g(z) \neq 0$ na $K(z'', r)$.

Slijedi da je na $K(z'', r)$

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{g'(z)(z-z'')^m - g(z)m(z-z'')^{m-1}}{(z-z'')^{2m}}}{\frac{g(z)}{(z-z'')^m}} = \frac{g'(z)(z-z'')^m - g(z)m(z-z'')^{m-1}}{g(z)(z-z'')^m} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{m}{z-z''}.$$

Kao i prije, funkcija $\frac{g'(z)}{g(z)}$ je holomorfna i ne utječe na reziduum, pa vidimo

$$\operatorname{res}(F, z'') = -m,$$

što dokazuje (2). $\square$

Posebno, ako je f holomorfna onda je $P_\gamma(f) = 0$, pa dobivamo:

Korolar. Neka je Ω otvoren zvjezdast skup, neka je f holomorfna funkcija na Ω, i neka je γ kontura u Ω takva da f nema nultočaka na γ. Tada je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_\gamma(f),$$

gdje je $N_\gamma(f)$ broj nultočaka od f unutar γ računajući kratnost.

Napomena

Primijetimo da je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}(\ln f(z)) = \frac{d}{dz}(\ln|f(z)| + i \arg f(z)).$$

Slijedi da je integral

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

povezan s promjenom argumenta $f(z)$ kad z obiđe γ.

To objašnjava ime "princip argumenta".

Napomena

Princip argumenta i njegov korolar vrijede i bez pretpostavke da je Ω zvjezdast, uz pretpostavku da je unutrašnje područje od γ sadržano u Ω (to je automatski istina ako je Ω zvjezdast).

Dokaz koristi općenitiju verziju Teorema o reziduumima, koja slijedi iz Općeg Cauchyjevog teorema.

Napomena

Postoji i općenitija verzija Principa argumenta s dodatnom holomorfnom funkcijom h.

Ta tvrdnja kaže da je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z' \in B \text{ nultočka od } f} h(z')m(z',f) - \sum_{z'' \in B \text{ pol od } f} h(z'')m(z'',f),$$

pri čemu je $m(z',f)$ red nultočke z' od f, $m(z'',f)$ je red pola z'' od f, a B je unutrašnje područje konture γ,

Dokaz ove općenitije verzije je vrlo sličan dokazu našeg teorema.

Rouchéov teorem

Neka je Ω otvoren zvjezdast skup koji sadrži konturu γ. Neka su $f, g \in H(\Omega)$. Pretpostavimo da je

$$|g(z)| < |f(z)|, \qquad \forall z \in \gamma.$$

Tada je

$$N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g).$$

Dokaz

Za $t \in [0,1]$ definiramo funkciju

$$F_t : \Omega \to \mathbb{C}, \quad F_t(z) = f(z) + tg(z).$$

Pokažimo najprije da F_t nema nultočaka na γ.

Ako je $F_t(z) = 0$ za neki $z \in \gamma$ tada

$$f(z) + tg(z) = 0 \Rightarrow |f(z)| = |-tg(z)| = t|g(z)| \leq |g(z)|.$$

Kontradikcija. Dakle F_t je holomorfna na Ω i nema nultočaka na γ.

Prema Korolaru Principa argumenta slijedi

$$N_\gamma(F_t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_t'(z)}{F_t(z)}dz.$$

Drugim riječima,

$$\underbrace{N_\gamma(f+tg)}_{\in\mathbb{Z}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}dz, \quad \forall t \in [0,1].$$

Funkcija

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}dz$$

je neprekidna funkcija $[0,1] \to \mathbb{Z}$, pa mora biti konstanta.

(Naime, neprekidna funkcija segment preslikava u segment, a segmenti u $\mathbb{Z}$ su jednočlani skupovi.)

Posebno, gornja funkcija poprima iste vrijednosti u 0 i 1 , dakle

$$N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g). \qquad \square$$

Osnovni teorem algebre II
Polinom $h(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ n \geq 1$, ima n nultočaka u $\mathbb{C}$, računajući njihove kratnosti.

Dokaz. Uvedimo funkcije

$$f(z) = z^n; \qquad g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Tada je

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)|}{|f(z)|} = \lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| = 0.$$

Slijedi da za $\varepsilon = 1$ postoji $r > 0$ tako da je $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$ za sve z takve da je $|z| \geq r$, tj. $|g(z)| < |f(z)|$ za sve z takve da je $|z| \geq r$.

Neka je $R \geq r$ i $\gamma_R = S(0,R)$ (pozitivno orijentirana kružnica). Sada je

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \gamma_R,$$

odakle je, prema Roucheovom teoremu, $N_{\gamma_R}(f) = N_{\gamma_R}(f+g)$.

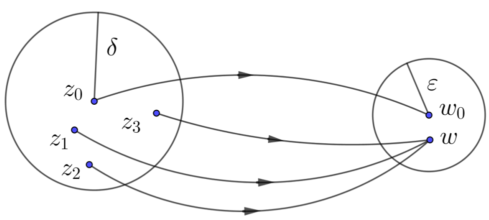
Očito je $N_{\gamma_R}(f) = n$ (jedina nultočka je 0, s kratnošću n). Dakle $N_{\gamma_R}(h) = n$ za svaki $R > r$, tj. h ima n nultočaka u $K(0,R)$ za svaki $R \geq r$.

Kako svaka nultočka od h pripada nekom (dovoljno velikom) krugu $K(0,R)$, slijedi da h ima n nultočaka u $\mathbb{C}$. $\square$

Sljedeći će se teorem pokazati ključnim za dokaz naprednijih svojstava holomorfnih funkcija, kao što su Teorem o otvorenom preslikavanju, Lokalna invertibilnost i Princip maksimuma modula.

Weierstrassov pripremni teorem
Neka je $f \in H(\Omega)$. Neka je $z_0 \in \Omega$; stavimo $w_0 = f(z_0)$. Pretpostavimo da funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda, i neka je taj red jednak m ($m \geq 1$).

Tada postoje $\varepsilon, \delta > 0$ takvi da za svaki $w \in K^*(w_0, \varepsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima točno m različitih nultočki u krugu $K(z_0, \delta)$, koje su sve reda 1.



Weierstrassov pripremni teorem za $m = 3$

Dokaz. Fiksirajmo $K(z_0, r) \subseteq \Omega$. Iz činjenice da funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda slijedi da je z_0 izolirana nultočka te funkcije.

Zato postoji $\delta \in (0, r)$ takav da

$$|z - z_0| \leq \delta, \ z \neq z_0 \quad \Rightarrow \quad f(z) - w_0 \neq 0.$$

Posebno, $|z - z_0| = \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - w_0| \neq 0$.

Budući da je funkcija $z \mapsto |f(z) - w_0|$ neprekidna, ona postiže minimum na kompaktnom skupu $S(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| = \delta\}$. Označimo taj minimum s ε. Kako su sve vrijednosti funkcije $z \mapsto |f(z) - w_0|$ na $S(z_0, \delta)$ strogo pozitivne, slijedi da je i $\varepsilon > 0$.

Budući da za svaki $z \in S(z_0, \delta)$ vrijedi $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$, zaključujemo da za svaki $w \in K(w_0, \varepsilon)$ vrijedi

$$|w - w_0| < \varepsilon \leq |f(z) - w_0|, \qquad \forall z \in S(z_0, \delta). \tag{3}$$

Sada stavimo $F(z) = f(z) - w_0$, $G(z) = w_0 - w$.

F i G su holomorfne funkcije na zvjezdastom skupu $K(z_0, r)$ koji sadrži konturu (kružnicu) $\gamma = S(z_0, \delta)$. Štoviše, prema (3) vrijedi $|G(z)| < |F(z)|$ za svaki z na γ.

Zato možemo primijeniti Rouchéov teorem i zaključiti da funkcije $F(z)$ i $(F + G)(z) = f(z) - w$ imaju jednak broj nultočki unutar γ računajući kratnosti.

Kako je $N_\gamma(F) = m$ (jedina nultočka je z_0, s kratnosti m), slijedi da je i $N_\gamma(F + G) = m$.

Drugim riječima, $(F + G)(z) = f(z) - w$ ima točno m nultočki u krugu $K(z_0, \delta)$ (računajući kratnosti).

Još treba vidjeti da možemo postići da sve nultočke od $F + G$ u $K(z_0, \delta)$ budu jednostruke.

To će biti ispunjeno ako je

$$(F + G)'(z) = \frac{d}{dz}(f(z) - w) = f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in K^*(z_0, \delta).$$

S obzirom da je z_0 nultočka konačnog reda od f' (taj red je $m - 1$), ona je izolirana.

Zato možemo ako je potrebno smanjiti δ (i onda naći novi ε za taj smanjeni δ), tako da f' nema nultočki na $K^*(z_0, \delta)$. $\square$

Korolar

Neka je f holomorfna na Ω, $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$. Pretpostavimo da funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda.

Tada postoje $\delta, \varepsilon > 0$ takvi da je $K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ i $K(w_0, \varepsilon) \subseteq f(K(z_0, \delta))$.

Dokaz. Ako su ε, δ kao u WPT, onda slijedi da je svaki $w \in K^*(w_0, \varepsilon)$ u $f(K(z_0, \delta))$.

Također je i $w_0 = f(z_0)$ u $f(K(z_0, \delta))$. $\square$